707

~~677~~. Convex ナ集合ニ関スル不動点定理

角谷　静夫（阪大）

§1

A. Markov ハ C. R. URSS 1(1936) p. 311 ニテ次ノ定理ヲ証明シテ井ル。[1]

$\boxed{\text{定理}}$ E ヲ locally convex ナ linear topological space, B ヲ bicompact, convex ナ E ノ部分集合（空デナイモノ），Γ ヲ E ヲ E ノ中ヘ affin ニ写像スル連続函数 $\varphi(x)$ ノ abelian ノ集合トスレバ、スベテノ $\varphi \in \Gamma$ ニ對シテ $\varphi(x) = x$ トナル如キ B ノ点 x ガ存在スル。

コヽニ $\varphi(x)$ ガ affin デアルト云フノハ任意ノ二点 $x, y \in B$ 及ビ二ツノ正数 λ, μ $(\lambda + \mu = 1)$ ニ對シテ $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$ トナルコトデアル。又 $\varphi(x)$ ノ集合 Γ ガ abelian デアルト云フノハ任意ノ点 $x \in B$ 及ビ函数 $\varphi, \psi \in \Gamma$ ニ對シテ $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x))$

---

(1) A. Markov: Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens, C. R. URSS, 1 (10), NO. 8 (1936), p. 311.　次ノ論文モコレニ関係ガアル。

A. Markov: Sur l'exisance d'un invariant integral, C. R. URSS, XVII, No. 9 (1937)

トナルコトデアル。

A. Markov ハコノ定理ヲ A. Tychonoff ノ不動点定理[(2)]ヲ用ヒテ証明シテヰル。

然ルニ A. Tychonoff ノ定理ハヨク知ラレテヰル如ク、有限次元ノ場合ノ Brouwer ノ不動点定理ヲ無限次元ノ場合ヘ拡張シタモノデ affin デナイ一般ノ寫像ノ場合ヲモ含ムモノデアル。ヨツテ affin ナ場合デアル A. Markov ノ定理ヲ証明スルノニ A. Tychonoff ノ定理ヲ用ヒルコトハスコシ牛刀ノ観ガアル。ヨツテコノ定理ノ直接ノ簡単ナ証明ガホシイノデアル。§2 ニ於テハ A. Markov ノ定理ノ証明ヲ紹介シ、§3 ニ於テコノ簡単ナ証明ヲ与ヘヨウ。

次ニ問題トナルノハ invariant ナ measure ノ問題デアル。A. Markov ハ先ノ定理ヲ用ヒテ abelian ナ寫像 $g(x)$ ノ集合ニ関シテ不変ナ measure ガ存在スルコトヲ証明シテヰルガ A. Markov ノ定理ガ証明サレレバ、コレニヨツテ measure ノ問題ガ割合ニ簡単ニ扱ヘルワケデアル。コレヲ §4 ニ於テ紹介シヨウ。[(2a)]

更ニ、ココニ注意シタイノハ S. Banach ノ linear

---

(2) A. Tychonoff: Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111 (1935)

(2a) コノ問題ニ関シテハ又
J. V. Neumann: Zur allgemeinen Theorie des Masses, Fund. Math., 13 (1929) ヲ参照.

functional ノ拡張ニ関スル定理(S. Banach: Théorie des opérations linéaires, 27 p)デアル。S. Banach ハ円周上ノ任意ノ集合ニ対シテ、円周ノ廻轉ニ関シテ不変ナ finite additive ナ measure ヲ定義シ得ルコトヲ証明シテヰルが、コレハ彼ノ linear functional ノ擴張ノ定理が基礎ニナツテヰルノデアル。

コノコトヨリ上ノ A. Markov ノ定理トS. Banach ノ定理トノ間ニ何カ関係ハナイカト云フコトが問題トナルノデアルが、実際ニ S. Banach ノ定理が A. Markov ノ不動点定理ノ corollary トシテ得ラレルコトがワカルノデアル。

シカモ S. Banach が與ヘタ條件ヲスコシユルクスルコトが出来ルノデアル。コレヲ §5 ニ於テ証明シヨウ。コノ証明デハ S. Banach ノ証明ノヤウニ Wohl ordnungs-satz ヲ直接用ヒナイカラ形式的ニハ証明がキレイニナル。(勿論 bicompact ナ空間ノ議論ヲスル場合ニハ Wohlordnungssatz ハ避ケラレナイカラ本質的ニハ証明が良クナツタワケデハナイが. S. Banach ノ linear functional ノ拡張ノ定理ニ不動点定理が使ヘルトイフコトハ面白イト思フ)

次ニ §6 ニ於テハ R. P. Agnew トA. P. Morse が Annals of Math. ニ於テ與ヘタ結果[3]ヲ紹介スル。

(註3) 次頁ヘ

コノ結果ハ上ノ A. Markov ノ不動点定理ヲ用フレバ殆ンド明カナコトトナツテシマフノデアル。

最後ニ §7 ニ於テハ再ビ A. Markov ノ不動点定理ニモドツテ Γ ガ abelian デナイ場合ヲ考ヘル。Γ ニ全然條件ヲオカナケレバ勿論不動点定理ハ成立シナイ。シカシ Γ ガ compact (又ハ bicompact) デアルトキニハ同様ナ不動点定理ガ成立スルノデアル。

証明ニハ W. Maak ガ J. v. Neumann ノ almost periodic function ヲ論ジタ方法[(4)]ヲ用ヒル。実際 Γ ガ compact, B ガ convex, compact, separable ナ場合ノ不動点定理ハ J. v. Neumann ノ almost periodic function ノ mean ノ存在ニ関スル定理[(5)]ニ相当スルノデアル。シタガツテコノ結果

---

(3) R. P. Agnew and A. P. Morse: Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures and densities, Annals of Math, 39, No. 1 (1935) p. 20—30.

(4) W. Maak: Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen, Hamburger Abh. 11 (1936)

(5) J. v. Neumann: Almost periodic function in a group, Trans. Amer. Math. soc., 36, No. 3 (1934).

ハ新シイトハ云ヘナイガ almost periodic function ノ mean ノ存在ガヤハリ不動点定理ヨリ得ラレルコトハ興味ガアル。

§ 2.

A. Markov ノ定理ノ証明: Γ ガ一ツノ函數 $\varphi(x)$ ノミヨリ成ル場合ハ A. Tychonoff ノ不動点定理ガソノマヽ應用出来ル。ヨツテ $\varphi(x)=x$ ナル如キ B ノ点 x ガ存在スル。今コノ $\varphi(x)=$ 関スル不動点 x ノ全体ノ集合ヲ I_φ ニテ表ハセバ I_φ ハ bicompact, convex デアル。勿論空集合デナイ。ヨツテ今モシ任意ノ有限個ノ $\varphi_1, \varphi_2, \text{------}, \varphi_n \in \Gamma$ ニ對シテ $I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2}, \text{------}, I_{\varphi_n}$ ガ共通点ヲモツコトガ証明出来レバ各々ノ I_φ ガ bicompact ナルコトヨリ $\prod_{\varphi\in\Gamma} I_\varphi \neq 0$ トナリ $\prod_{\varphi\in\Gamma} I_\varphi$ ノ各点ガ求ムル不動点トナル。

ヨツテ問題ハ $I_{\varphi_1}\cdot I_{\varphi_2}\cdot\text{-------}\cdot I_{\varphi_n}\neq 0$ ノ証明ニ帰スル。コレハ帰納法ニヨル。$n=1$ ナルトキハ上述ノコトヨリ明カ。

次ニ $B^*=I_{\varphi_1}\cdot I_{\varphi_2}\cdot\text{--------}\cdot I_{\varphi_{n-1}}\neq 0$ トセヨ。B^* ハ bicompact, convex デアル。且ツ $\varphi_n(B^*)\subset B^*$ デアル。何トナレバ $x\in B^*$ トスレバ $x\in I_{\varphi_i}$ ($i=1.2,\text{-------}, n-1$) ヨツテ $\varphi_i(x)=x$ ($i=1.2,\text{----}, n-1$) コレヨリ $\varphi_i(\varphi_n(x))=\varphi_n(\varphi_i(x))=\varphi_n(x)$ シタガツテ $\varphi_n(x)\in I_{\varphi_i}$ ($i=1.2,\text{-----}, n-1$). 故ニ $\varphi_n(x)\in B^*=I_{\varphi_1}\cdot I_{\varphi_2}\text{-------}\cdot I_{\varphi_{n-1}}$. 故ニ B^* 及ビ

$\varphi_n(x)$ ニ再ビ A. Tychonoff ノ定理ヲ應用スレバ $\varphi_n(x)=x$ ナル如キ B^* ノ點 x ガ存在スルコトガワカル。ヨッテ $B^*\cdot I_{\varphi_n}\neq 0$. 即チ $I_{\varphi_1}\cdot I_{\varphi_2}\cdots\cdots\cdot I_{\varphi_n}\neq 0$（証明終）。

§ 3

A. Markov ノ定理ノ直接ノ証明: Γ ハ Multiplicative デアルト假定シテモ差支ヘナイ。即チ任意ノ φ, $\psi\in\Gamma$ ニ對シテ $\varphi\psi\in\Gamma$ デアルトスル。

任意ノ有限個ノ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_n\in\Gamma$ ニ對シテ

$$\varphi^*(x)=\frac{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots\cdots+\varphi_n(x)}{n}$$

ニヨッテ φ^* ヲ定義スル。φ^* ハ明カニ B ヲ B ノ中ヘ連續ニ寫像スル affin ナ函數デアル。且ツカヽル二ツノ函數

$$\varphi^*=\frac{\varphi_1+\varphi_2+\cdots\cdots+\varphi_n}{n},\quad \psi^*=\frac{\psi_1+\psi_2+\cdots\cdots+\psi_m}{m}$$

ハ交換可能デアル。即チ任意ノ $x\in B$ ニ對シテ

$$\varphi^*(\psi^*(x))=\psi^*(\varphi^*(x)).$$

カヽル φ^* 全体ノ集合ヲ Γ^* トセヨ。Γ^* ハ abelian デアル。$\varphi^*\in\Gamma^*$ ニ對シテ集合 $\varphi^*(B)$ ヲ考ヘル。コレハ明カニ biconpact ナ空デナイ。シカモ任意ノ有限個ノ $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \cdots\cdots, \varphi_p^*\in\Gamma^*$ ニ對シテ $\varphi_1^*(B)\cdot\varphi_2^*(B)\cdot\cdots\cdots\varphi_p^*(B)\neq 0$ デアル。

何トナレバ $p=2$ ナルトキハ $\varphi_1^*(\varphi_2^*(B))\subset\varphi_1^*(B)$,

$\varphi_2^*(\varphi_1^*(B))\subset\varphi_2^*(B)$, $\varphi_1^*(\varphi_2^*(B))=\varphi_2^*(\varphi_1^*(B))$ ナルコトヨリ明カ。一般ノ p ニ対シテモ同様ニ証明スルコトガ出来ル。ヨツテ $\varphi^*(B)$ ガ何レモ *bicompact* ナルコトヨリ

$$\prod_{\varphi^*\in\Gamma^*}\varphi^*(B)\neq 0,\quad x\in\prod_{\varphi^*\in\Gamma}\varphi^*(B)$$

ナル任意ノ x ガ求ムル不動点デアルコトヲ証明シヨウ。

帰謬法ニヨル。モシ x ガ所要ノ不動点デナケレバ少クトモ一ツノ $\varphi\in\Gamma$ ニ對シテ $\varphi(x)\neq x$. 今コノ φ ニ対シテ

$$\varphi_n=\frac{\varphi+\varphi^2+\cdots\cdots+\varphi^n}{n}$$

ヲ考ヘル。但シ φ^k ハ φ ヲ k 回 *iterate* シタモノデアル。$\varphi_n\in\Gamma^*$ デアルカラ $x\in\prod_{\varphi^*\in\Gamma}\varphi^*(B)\subset\varphi_n(B)$ ナルコトヨリ $\varphi_n(x_n)=x$ ナル如キ $x_n\in B$ ガ存在スル。ヨツテ

$$\varphi(x)-x=\frac{\varphi^2(x_n)+\varphi^3(x_n)+\cdots\cdots+\varphi^{n+1}(x_n)}{n}$$

$$-\frac{\varphi(x_n)+\varphi^2(x_n)+\cdots\cdots+\varphi^n(x_n)}{n}=\frac{\varphi^{n+1}(x_n)-\varphi(x_n)}{n}$$

故ニ今 $\varphi^{n+1}(x_n)=\alpha_n$, $\varphi(x_n)=\beta_n$ トオケバ $\alpha_n,\beta_n\in B$ $(n=1.2.\cdots\cdots)$ ニテ且ツ $0\neq\varphi(x)-x=\dfrac{\alpha_n-\beta_n}{n}$ シカルニ、カヽル α_n,β_n ガ存在スルコトハ B ガ *bicompact* デアルコトニ矛盾スルカラ、スベテノ $\varphi\in\Gamma$ ニ対シテ $\varphi(x)=x$ デナケレバナラナイ。（証明終）

§4

A. Markov ノ不動点定理ノ measure ノ問題ヘノ適用

E ヲ一ツノ集合，Γ ヲ E ヲ E ノ中ヘ寫像スル変換 φ ノ abelian ナ集合トスル。E デ定義サレタ有界ナ実数値ノ函数 $f(x)$ 全体ノ集合ヲ F デ表ハス（E ニハ topology ハナイノデアルカラ φ 及ビ f ノ連続性ハ問題トシナイ！） F デ定義サレタ functional $M(f)$ 全体ノ集合 L ヲ考ヘル。L ノ topology ヲ次ノ様ニ導入スル。$M\in L$ ニ対シテ $M_f = M(f)$ $(f\in F)$ ヲ M ノ f- 坐標ト考ヘ、L ヲコノ f-坐標ノ作ル直線 l_f ，$f\in F$ 全体ニ対スル topological product（A. tychonoff ノ意味ノ）ト考ヘル。即チ、任意ノ $M_0\in L$ ニ対シテソノ近傍 $U\left(M_0, \begin{smallmatrix} f_1, & f_2, & \cdots\cdots, & f_n \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \cdots\cdots, & \varepsilon_n \end{smallmatrix}\right)$ ヲ $|M(f_i)-M_0(f_i)|<\varepsilon_i$, $i=1,2,\cdots\cdots,n$ ナル $M\in L$ 全体ノ集合トシテ定義スルノデアル。カクシテ定義サレタ topology ニ関シテ L ガ locally convex ナ linear space トナルコトハ明カデアル。今 L ニ属スル M ノウチ

1° $M(\mathbb{1})=1$ ；但シ $\mathbb{1}$ ハ $f(x)=1$, $x\in E$ ナル函数 $f(x)$ ヲ表ハス。

2° $M(f+g)=M(f)+M(g)$

3° $f\geqq 0$ ナラバ $M(f)\geqq 0$：但シ $f\geqq 0$ トハ任意ノ $x\in E$ ニ對シテ $f(x)\geqq 0$ ナルコトヲ表ハス。

ヲ満足スルモノ全体ノ集合ヲ B トスレバ B ハ convex,

bicompact デ且ツ空集合デナイ。先ヅBガ convex ナルコトハ明カ。Bガ bicompact ナルコトヲ証明スルタメニ A. Tychonoff ノ結果[(6)]ヲ用ヒル。即チ、B ニ属スル M ニ対シテソノ f ー坐標ヲ考ヘルト（$f\in F$，任意）$|f(x)|\leqq K_f$，$x\in E$ ナル K_f ガアルコトヨリ

$$|M_f|\equiv|M(f)|\leqq K_f\quad(1°, 2°, 3° ヨリ)$$

トナル。ヨツテ B ハ closed interval $[-K_f, K_f]$ ノスベテノ $f\in F$ ニ関スル product space B^* ノ部分集合デアル。B^* ハ A. Tychonoff ノ定理[(6)]ヨリ bicompact デ且ツ B ハ B^* ノ中デ閉ヂテキルカラ B ハ bicompact。

最後ニ B ガ空集合デナイコトハ $x_0\in E$ ヲ任意ニトリ $M_0(f)\equiv f(x_0)$ ニヨツテ M_0 ヲ定義シテ見レバワカル。

次ニ $M(f)\in L$ ニ對シテ $\varphi^*M(f)\equiv M(f(\varphi))$ ニヨツテ $\varphi^*M(f)$ ヲ定義スレバ $\varphi\in\Gamma$ ニ対シテ L ヲ L ノ中ヘ affin ニ寫像スル連續函數 φ^* ガ得ラレル。（φ^* ガ affin ナルコトハ明カ。又 φ^* ガ連続ナルコトハ $|\varphi^*M_1(f)-\varphi^*M_2(f)|<\varepsilon$ ナラシメルタメニハ $|M_1(f(\varphi))-M_2(f(\varphi))|<\delta=\varepsilon$ トトツテオケバヨイコトヨリ明カ。）

$\varphi\in\Gamma$ ニ対スル φ^* 全体ノ集合ヲ Γ^* トスレバ Γ^* ハ明カニ abelian デアル。ヨツテ A. Markov ノ不動点

---

(6) A. Tychonoff: Über die Topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. 102 (1930)

定理ガ應用デキテ、スベテノ $\varphi^* \in \Gamma^*$ 及ビ $f \in F$ ニ対シテ $\varphi^* M(f) = M(f)$. トナル如キ $M \in B$ ガ存在スル。φ^* ノ定義ヨリ $M(f(\varphi)) = M(f)$. ガスベテノ $f \in F$ 及ビ $\varphi \in \Gamma$ ニ対シテ成立スル。$M(f)$ ヲ f ノ "integral" トエフ。コレヲ定理ノ形ニマトメル。

定理 E ヲ任意ノ集合，Γ ヲ E ヲ E 自身ノ中ヘ寫像スル函数 φ ノ abelian ナ集合，F ヲ E デ定義サレタ有界ナ実数值函数全体ノ集合トスレバ F デ定義サレタ functional $M(f)$ ニテ先ノ條件 $1°$, $2°$, $3°$ ノ外ニ條件

$$4° \quad M(f(\varphi)) = M(f), \qquad f \in F,\ \varphi \in \Gamma.$$

ヲ満足スルモノガ存在スル。

此ノ如ク invariant ナ "integral" ガ定義出来レバ、コレヨリ invariant ナ measure ヲ定義スルコトハ容易デアル。先ヅ一般ノ finite-additive ナ measure ヲ求メルニハ任意ノ E ノ部分集合 A ニ対シテ A ノ characteristic function $\chi_A(x)$ ヲ取リ

$$m(A) = M(\chi_A(x))$$

トオケバ $m(A)$ ハ

$1°$ $m(E) = 1$

$2°$ $m(A+B) + m(A \cdot B) = m(A) + m(B)$

特ニ $A \cdot B = 0$ ナラバ

$$m(A) + m(B) = m(A+B)$$

$3°$ $m(A) \geqq 0$

$4°$ $m(\varphi^{-1}(A)) = m(A)$

ヲ満足スル。4° ニテハ φ ノ代リニ φ^{-1} ガ現ハレルノデ困ルガコレヲ φ デオキカヘルタメニハ最初ニ φ ガ one-to-one デ E ヲ E 全体ニ寫像スル函数トシ、φ ノ中ヘ φ^{-1} モ入レテ考ヘテオケバヨイ。[7]

次ニ、E ニ於テ Γ ニ関シテ invariant ナ carathéodory ノ outer measure ヲ定義スルタメニハ E ヲ normal ナ topological space, Γ ヲ E ヲ E 全体ヘ homeomorph ニ寫像スル函数ノ abelian ノ集合（又ハ abelian group！）スレバヨイ。コレハ J.v. Neumann ガ Haar ノ measure ノ場合ニ行ッタト同ジ方法デ出来ル。[8]

コヽデ注意シテオキタイノハ N. Kryloff ト

---

(7) カヽル Γ ニ関スル invariant ナ measure ヲ定義スルトキ Γ ガ abelian（又ハ soluble）デアルコトガ重要ナ條件デアル。一般ノ group Γ ノ場合ニ不可能ナコトハ例ヘバ J.v. Neumann: Zur allgemeinen theorie des Masses, Fund. Math., 13 (1924).

(8) J.v. Neumann: Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Compositio Math., 1 (1934)

N. Bogolionboff ガ得タ結果[(9)]デアル。ソレハ Ω ヲ compact separable ナ空間，T_t ヲ Ω ヲ Ω 全体ヘ homeomorphic ニ寫像スル函數ノ群デ $T_t T_s = T_{t+s}$ （t, s ハ實数）ヲ満足スルモノトシ且ツ $P_t = T_t(p)$ ガ Ω ト $-\infty < t < \infty$ トノ product space デノ連続函数デアルモノトスル。

コノトキ Ω ニ T_t ニ關シテ invariant ナ measure (Lebesgue ノ) ガツケラレルトイフノデアル。コレハ時ニ A. Markov ノ結果ヨリ得ラレル。コノヤウナ measure ノ存在ハ Ergodic problem ノ議論ニテハ常ニ假定サレテキタノダガ、コゝデハジメテ證明サレタノデアル。

コノ二人ノ證明ハ compact, separable ナ空間デ定義サレタ measure ハ compact ナ空間ヲ作ルト云フコトヲウマク用ヒタノデアッテ、コノ方ヘオデイロイロ面白イ結果ガ出ルノデアルガ、單ニ invariant ナ measure ノ存在ヲ證明スルノガ目的ナラバ、コノ A. Markov ノ結果ヲ用ヒタ方ガ早イノデアル。

---

(9) N. Kryloff et N. Bogolionboff: La théorie générale de la measure dans son application à l'étude des systimes dynamiques de la méchanique non linéaire, Annals of Math., 38(1937)

§ 5

S. Banach ノ定理ヲ不動点定理ニヨツテ証明スルコト。

先ヅ S. Banach ノ定理ヲ掲ゲル。

$\boxed{\text{定理}}$ E ヲ linear space, E_1 ヲソノ linear subspace トスル。E デ定義サレタ functional $p(x)$ ガ次ノ條件

1° $p(x+y) \leqq p(x)+p(y)$, $\quad x, y \in E$

2° $p(tx) \leqq t \cdot p(x)$ $\quad t \geqq 0,\ x \in E$

ヲ満足シ且ツ E_1 デ定義サレタ linear functional $f(x)$ ガ存在シテコレガ

3° $f(x) \leqq p(x)$ $\quad x \in E_1$

ヲ満足スレバ $f(x)$ ヲ E 全体ヘ 3° ノ條件ヲ満足シツツ linear ニ拡張スルコトガ出来ル。即チ F 全体デ定義サレタ linear functional $F(x)$ デ次ノ條件ヲ満足スルモノガ存在スル。

4° $f(x)=F(x)$ $\quad x \in E_1$

5° $F(x) \leqq p(x)$ $\quad x \in E$

証明:

$F(x)$ ヲ E デ定義サレタ任意ノ functional（必ズシモ linear ト限ラヌ！）トシカツル functional 全体ノ集合ヲ $\mathfrak{F}$ ニテ表ハス。

次ニ任意ノ $F \in \mathfrak{F}$ ニ對シテ linear operation

T_y ヲ

$$T_y F(x) = F(x+y) - F(y)$$

ニヨツテ定義スル。但シ $y \in E$ ニテ右辺ハ x ヲ variable トスル functional $\in \mathfrak{F}$ デアルト考ヘル。T_y ハ明カニ $\mathfrak{F}$ ヲ $\mathfrak{F}$ ノ中ヘ寫像スル linear operator デ且ツ任意ノ $y, z \in E$ ニ對シテ

$$T_y T_z F(x) = T_{y+z} F(x)$$

ヲ満足シテヰルコトハ容易ニタシカメラレル。コレヨリ

$$T_y T_z = T_z T_y$$

トナルコトモワカル。今 $F \in \mathfrak{F}$ ノウチ特ニ $4°$ 及ビ

$6°$ 任意ノ $x, y \in E$ ニ對シテ

$$-p(-x) \leqq T_y F(x) = F(x+y) - F(x) \leqq p(x)$$

ヲ満足スルモノヲ考ヘ、カヽル functional $F(x)$ 全体ノ集合ヲ $\mathcal{B}$ ニテ表ハス。T_y ハ $\mathcal{B}$ ヲ $\mathcal{B}$ ノ中ヘ寫像スル linear operator デアル。コノコトハ $F \in \mathcal{B}$ ナラバ任意ノ $y, z \in E$ ニ對シテ

$$-p(-x) \leqq T_{y+z} F(x) = T_y T_z F(x) \leqq p(x)$$

トナリ、シタガッテ $T_z F(x) \in \mathcal{B}$ トナルコトヨリワカル。

次ニ $\mathfrak{F}$ ノ topology ヲ例ノ如ク任意ノ $F_0 \in \mathfrak{F}$ ニ對シテ

$$|F(x_i) - F_0(x_i)| < \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

ヲ満足スル functional $F(x)$ 全体ノ集合 $U\left(F_0, \begin{matrix}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n \\ x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\end{matrix}\right)$ デアルト定義スレバ（$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n > 0$ 及ビ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \in E$ ハ任意！）

コノ topology ニヨツテ B ハ bicompact ナ集合トナル。シカモ T_z（$z\in E$, 任意！）ハ B ヲ B ノ中ヘ寫像スル連續ナ linear operator デアル。B ガ convex ナルコトハ明カデアルカラ A. Markov ノ定理ヲ應用スルニハ B ガ空集合デナイコトヲ示セバヨイ。

コノタメニ $F(x)\in\mathfrak{F}$ ヲ

$$F(x)=\underset{\xi\in E;}{g.l.b.}\,(f(\xi)+p(x-\xi))$$

ニヨツテ定義スレバヨイ。右辺ガ有限ナ値デアルコトハ

$$f(\xi)+p(x-\xi)\geqq -p(-\xi)+p(x-\xi)\geqq -p(-x)$$

ナルコトヨリワカル。$F(x)\in B$ ナルコトヲ次ニ証明スル。

(i) 任意ノ $y\in E$ ニ對シテ $F(x+y)-F(y)\leqq p(x)$ ナルコト。

$F(y)$ ノ定義ヨリ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ $\xi_0=\xi_0(y,\varepsilon)\in E$, ガ定マツテ

$$F(y)+\varepsilon>f(\xi_0)+p(y-\xi_0)$$

トナル。ヨツテコノ ξ_0 ニ對シテ

$$\begin{aligned}F(x+y)-F(y)&<\{f(\xi_0)+p(x+y-\xi_0)\}\\&\quad-\{f(\xi_0)+p(y-\xi_0)-\varepsilon\}=p(x+y-\xi_0)-p(y-\xi_0)+\varepsilon\\&\leqq p(x)+\varepsilon\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ ハ任意デアツタカラ

$$F(x+y)-F(y)\leqq p(x)$$

(ii) 任意ノ $y\in E$ ニ對シテ $-p(-x)\leqq F(x+y)-F(y)$ ナルコト。

$F(x+y)$ ノ定義ヨリ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ
$\xi_0=\xi_0(x+y,\varepsilon)\in E_1$ ガ定マッテ

$$F(x+y)+\varepsilon>f(\xi_0)+p(x+y-\xi_0)$$

トナル。ヨッテコノ ξ_0 ニ對シテ

$$\begin{aligned}F(x+y)-F(y)&>\{f(\xi_0)+p(x+y-\xi_0)-\varepsilon\}\\&\quad-\{f(\xi_0)+p(y-\xi_0)\}\\&=p(x+y-\xi_0)-p(y-\xi_0)-\varepsilon\geqq-p(-x)-\varepsilon\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ ハ任意デアッタカラ $F(x+y)-F(y)\geqq-p(-x)$

(iii) $x\in E_1$ ナルトキ $F(x)=f(x)$ トナルコト。

$x\in E_1$ ナラバ任意ノ $\xi\in E_1$ ニ對シテ

$$f(\xi)+p(x-\xi)\geqq f(\xi)+f(x-\xi)=f(x)$$

且ツ $\xi=x$ トオケバ

$$f(\xi)+p(x-\xi)=f(x)+p(0)=f(x)\qquad(p(0)=0)$$

ヨッテ $F(x)=f(x)$ トナル。

(i), (ii) 及ビ (iii) ヨリ $F(x)\in B$ トナルコトガワカッタ。

此ノ如クシテ B ガ convex, bicompact デ空デナイコトガワカッタカラ A. Markov ノ定理ヨリスベテノ $y\in E$ ニ對シテ

$$T_yF(x)=F(x)$$

トナル如キ $F(x)\in B$ ガ存在スル。コノ式ハ書キ直セバ任意ノ $x,y\in E$ ニ對シテ

$$F(x+y)=F(x)+F(y)$$

トナルコトデアルカラ $F(x)$ ハ additive デアル。コノ

$F(x)$ ハ條件 $6°$ ヲ満足スルカラ、コヽニテ $y=0$ トオケバ $F(x) \leqq p(x)$ ガ任意ノ $x \in E$ ニ對シテ成立スルコトガワカル。又 $F(x)$ ガ $4°$ ヲ満足スルコトハ明カデアル。ヨツテ $F(x)$ ガ homogene (即チ $t \geqq 0$ ニ對シテ $F(tx) = t \cdot F(x)$) デアルコトヲ示スコトガ出来レバ証明ハ完結スル。

然ルニ上ノ如クシテ存在スルコトガワカツタ additive ナ functional $F(x)$ ハ必ズシモ homogene トナラナイカラ、次ノヤウニモウ一度不動点定理ヲ應用スル。即チ上デ考ヘタ B ニ屬スル functional $F(x)$ ノウチ、additive ナモノノミヲ考ヘテソノ全体ヲ B_1 トスル。上ノ不動点定理ヨリ B_1 ハ空集合デナイ。又 B_1 ガ convex, bicompact ナコトハ容易ニワカル。今 $F(x) \in B_1$ ニ對シテ

$$S_t F(x) = \frac{F(tx)}{t}, \qquad t > 0$$

ニヨツテ operator S_t ヲ定義スル。S_t ハ明カニ B_1 ヲ B_1 ノ中ヘ寫像スル linerr operator デアル。何トナレバ任意ノ $t>0$, $x, y \in E$ ニ對シテ $F(x) \in B_1$ ナラバ

$$T_y S_t F(x) = T_y\left(\frac{F(tx)}{t}\right) = \frac{F(tx+ty)}{t} - \frac{F(ty)}{t} = \frac{F(tx)}{t}$$

トナリ

$$-p(-tx) \leqq F(tx) \leqq p(tx)$$

及ビ $-p(-tx)=-t\cdot p(-x)$, $p(tx)=t\cdot p(x)$ ナルコトヨリ

$$-p(-x)\leqq T_y S_t F(x)\leqq p(x)$$

ヨツテ $S_t(B_1)\subset B_1$. S_t ガ linear ナルコトハ明カデアル。S_t ガ abelian デアルコトハ $S_t S_s=S_{ts}$ トナルコトヨリ明カデアルカラ B_1 ニ對シテ再ビ A. Markov ノ不動点定理ヲ應用スレバ $F(x)\in B_1$ ニテ任意ノ $t>0$ 及ビ $x\in E$ ニ對シテ

$$S_t F(x)=\frac{F(tx)}{t}=F(x)$$

ヲ滿足スルモノガ存在スルコトガワカル。コノ $F(x)$ ガ求ムル linear (= additive 且ツ homogene) ナ functional デアルコトハ明カデアロウ。

コヽデ注意シタイコトハ(本論ヨリ横ニソレルコトデアルガ) S. Banach ノ定理ノ條件ガ弱クスルコトガ出來ルコトデアル。即チ、1°, 2° ノ代リニ

1^* $\lambda,\mu>0$, $\lambda+\mu=1$, $x, y\in E$ ニ對シテ

$$p(\lambda x+\mu y)\leqq\lambda p(x)+\mu p(y)$$

ヲモツテ來ルコトガ出來ルノデアル。コレハ $p(x)$ ガ convex ナ函數デアルト云フ條件デアル。コノ條件ノ下デ S. Banach ノ定理ガ成立スルコトハ S. Mazur ノ定理[10]

[10] S. Mazur: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math. 4 (1933)

ヨリモ殆ンド明カデアル。

S. Mazur ニヨレバ Banach space E_2 内ニ内点ヲモツ convex ナ集合 K ト K ノ内点ヲ含マナイ linear subspace E_3 トガ存在スレバ E_3 ヲ含ミ、K ノ内点ヲ含マナイ E_2 ノ hyperplane E_4 ガ存在スル。コノ定理ヲ今ノ問題ニ應用スルタメニハ E ト実数軸 $-\infty < y < \infty$ トノ topological product E_2 ヲ考ヘテ、コノ中ニ $y \geqq p(x)$ ナル関係ニアル点 (x, y) $(x \in E$, y: 実数) 全体ノ集合ヲ K トスレバヨイノデアル。E_3 トシテ $x \in E_1$, $y = f(x)$ ナル (x, y) 全体ノ集マル linear subspace ヲトレバコノ K, K_3 ハ S. Mazur ノ定理ノ條件ヲ満足シテヰルカラ E_3 ヲ含ミ K ノ内点ヲ含マナイ hyperplane E_4 ガ存在スル。コノ E_4 ハ $y = F(x)$ ナル linear functional ニヨツテ與ヘラレルガ、コノ $F(x)$ ガ求ムル linear functional トナルノデアル。

コレデ $1°$, $2°$ ガ 1^* デオキカヘラレルコトガ分ツタノデアルガ、実ハ S. Mazur ノ定理ソノモノガ S. Banach ノ定理カラ出テヰルノデ、ヤハリ直接ニ証明シタ方ガヨイノデアル。(11)

---

(11) 條件 $1°$, $2°$ ノ下デノ S. Banach ノ定理カラ S. Mazur ノ定理ヲ出シ、コレカラ條件 1^* ノ下デノ S. Banach ノ定理ヲ再ビ出シテモ循環論法デハナイ！

直接ノ証明ハ次ノ如クスレバヨイ。S. Banach ノ証明ヲ見レバ任意ノ $s, t > 0$ 及ビ $x_0 \in E - E_1$, $y, z \in E_1$ ニ對シテ

$$\frac{-p(z - s x_0) + f(z)}{s} \leqq \frac{p(y + t x_0) - f(y)}{t}$$

トナルコトガ証明出来レバ、アトハ全然同ジヨウニヤレバヨイコトガワカル。コノ不等式ヲ出スノニハ次ノ様ニスレバヨイ。

$$\frac{1}{s+t} f(sy + tz) = f\left(\frac{sy + tz}{s+t}\right) \leqq p\left(\frac{sy + tz}{s+t}\right)$$

$$= p\left(\frac{s(y + t x_0) + t(z - s x_0)}{s+t}\right)$$

$$\leqq \frac{s}{s+t} p(y + t x_0) + \frac{t}{s+t} p(z - s x_0)$$

ガ任意ノ $s, t > 0$, $y, z \in E_1$ ニ対シテ成立スルカラ、コレヨリ

$$s f(y) + t f(z) = f(sy + tz)$$
$$\leqq s \cdot p(y + t x_0) + t \cdot p(z - s \cdot x_0),$$

ヨツテ

$$\frac{-p(z - s x_0) + f(z)}{s} \leqq \frac{p(y + t x_0) - f(y)}{t}$$

又実際ニ條件 1^* カラ $1°$, $2°$ ヘウツルコトガ出来ルノデアル。即チ條件 1^* ヲ満足スル。$p(x)$ ト、コレニ對シテ條件 $3°$ ヲ満足スル E_1 デノ linear functional $f(x)$ ガアッタトキ．$p_1(x)$ ヲ $1°, 2°, 3°$ ヲ満足シ且ツ $p_1(x) \leqq p(x)$,

$x \in E$ トナルマウニスルコトが出来ルノデアル。コノタメニハ

$$p_1(x) = \underset{t>0}{\mathrm{l.u.b.}} \frac{p(tx)}{t}$$

トオケバヨイ。$p_1(x)$ が各々ノ x ニ對シテ有限ニナルコトハ $p(tx) + tp(-x) \geqq (1+t)p(0) \geqq 0$ ヨリ

$$\frac{p(tx)}{t} \geqq -p(-x)$$

が得ラレルコトヨリ明カ。$p_1(tx) = p_1(x)$, $p_1(x) \leqq p(x)$, $p_1(x) \geqq f(x)$, $x \in E$ ハ何レモ明カデアルカラ $p_1(x+y) \leqq p_1(x) + p_1(y)$ ヲ証明シヨウ。

$p_1(x)$, $p_1(y)$ ノ定義ヨリ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ s_0, t_0 が定マッテ

$$p_1(x) + \varepsilon > \frac{p(s_0 x)}{s_0}, \quad p_1(y) + \varepsilon > \frac{p(t_0 y)}{t_0}$$

ヨッテ

$$p_1(x) + p_1(y) + 2\varepsilon > \frac{p(s_0 x)}{s_0} + \frac{p(t_0 y)}{t_0}$$

$$= \frac{t_0 p(s_0 x) + s_0 p(t_0 y)}{t_0 + s_0} \cdot \frac{t_0 + s_0}{s_0 t_0}$$

$$\geqq p\left(\frac{t_0 s_0 x + s_0 t_0 y}{t_0 + s_0}\right) \cdot \frac{t_0 + s_0}{s_0 t_0} \geqq p_1\left(\frac{t_0 s_0}{t_0 + s_0}(x+y)\right) \cdot \frac{t_0 + s_0}{s_0 t_0}$$

$$= p_1(x+y).$$

$\varepsilon > 0$ ハ任意ナル故

$$p_1(x) + p_1(y) \geqq p_1(x+y)$$

§ 6

R. P. Agnew ト A. P. Morse ハ次ノ定理ヲ証明シタ。

$\boxed{\text{定理}}$ E ヲ linear space, E_1 ヲ ソノ sub-linear space トスル。今 E ヲ E ノ中ヘ linear ニ寫像スル operator $g(x)$ ノ Group G ガ與ヘラレテヰルトセヨ。シカモソノ際 E_1 ハ $g(x)$ ニヨッテ E_1 ノ中ヘ寫像サレルモノトスル。E デ定義サレタ functional $p(x)$ ニテ次ノ條件

1° $p(x+y) \leqq p(x) + p(y)$ $\qquad x, y \in E$

2° $p(tx) = t \cdot p(x)$ $\qquad t \geqq 0, x \in E$

3° $p(g(x)) = p(x)$ $\qquad g \in G, x \in E$

ヲ満足スルモノガ存在シ且ツコノ $p(x)$ ニ對シテ次ノ條件ヲ満足スル E_1 デ定義サレタ linear functional $f(x)$ ガ存在スルモノトスル。

4° $f(x) \leqq p(x)$ $\qquad x \in E_1$

5° $f(g(x)) = f(x)$ $\qquad x \in E_1, \ g \in G$

然ルトキハ、若シ次ノ條件

6° $F_1(x) \leqq p(x)$ $\qquad x \in E$

7° $F_1(x) = f(x)$ $\qquad x \in E_1$

8° $F_1(g(x)) = F_1(x)$ $\qquad x \in E, \ g \in G'$

ヲ満足スル linear functional $F_1(x)$ ガ存在スレバ 6°, 7° 及ビ

$9^\circ \quad F(g(x)) = F(x) \qquad x \in E,\ g \in G$

ヲ満足スル linear functional $F(x)$ ガ存在スル。但シ G' ハ G ノ derived subgroup ヲ表ハス。

定理ハ非常ニ複雑ナ形デアルガ云フ所ハ簡単デアル。特ニ G ガ abelian group デアレバ G' ハ unit element ダケノ group トナリ $6^\circ, 7^\circ, 8^\circ$ ヲ満足スル linear functional $F_1(x)$ ノ存在ハ S. Banach ノ定理ヨリ明カデアルカラ $6^\circ, 7^\circ, 9^\circ$ ヲ満足スル linear functional $F(x)$ ノ存在ガ $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$ ヨリ出ルノデアル。

コノコトハ G ガ abelian デナクテモ soluble デアレバ同ジ方法ヲ有限回繰返ヘセバヨイノデアルカラ、G ガ soluble デアル場合ニハ $F_1(x)$ ノ存在ニ関スル假定ハイラナイ。

R. P. Agnew 及ビ A. P. Morse ハコノ方法ニヨツテ任意ノ λ, μ ニ対シテ $(\lambda \neq 0)$

$$|\lambda| \int x(\lambda s + \mu)\, ds = \int x(s)\, ds$$

ヲ満足スル積分ヲ導入シテヰル。（詳シクハ原論文ヲ見ラレタイ）

原ノ証明ハソレホド長クハナイノデアルガ、ココニ注意シタイノハコノ定理ガ A. Markov ノ不動点定理ヨリ簡単ニ得ラレルコトデアル。

即チ、條件 $6^\circ, 7^\circ, 8^\circ$ ヲ満足スルアラユル linear functional ノ集合 B ヲ考ヘルト B ハ bicompact, convex デ且ツ假定ニヨリ空集合デナイ。シカモ任意ノ $F(x) \in B$ ニ對シテ,

$$g^* F(x) = F(g(x)), \qquad g \in G$$

ニテ g^* ヲ定義スレバ g^* ハ B ヲ B ノ中ヘ affin ニ寫像スル連續寫像デアル。シカモカヽル $g^*(g \in G)$ ノ集リハ abelian デアル:

$$\begin{aligned} g_1^* g_2^* F(x) &= g_2^* F(g_2(x)) = F(g_2 g_1(x)) \\ &= F(g_1 g_2 g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1(x)) = F(g_1 g_2(x)) \\ &= g_2^* F(g_1(x)) = g_2^* g_1^* F(x) \end{aligned}$$

カラ A. Markov ノ定理ニヨッテスベテノ $g \in G$ ニ對シテ

$$F(g(x)) = F(x)$$

トナル如キ linear functional $\in B$ ガ存在スル。

（證明終）

——（ツヾク）——